Première – Spécialité Mathématiques

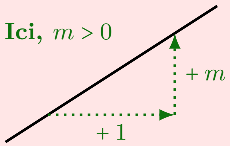
Chap. 1 : Trinômes du second degré

Quelques pré - requis sur les fonctions :

Le 1^{er} degré : Expression, courbe et tableau de signes.

$f(x) = m\,x + p$

représentée par une **droite oblique.**



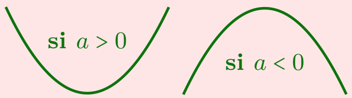
x	$-\infty$	$-\dfrac{p}{m}$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	Signe de $-m$	0	Signe de m

Mémo : On commence par le signe de $-m$.

Le 2^{nd} degré : Forme développée et allure de la courbe.

$f(x) = a\,x^2 + bx + c$

représentée par **une parabole.**



1 Forme factorisée : Courbe et tableau de signes.

À la découverte de la forme factorisée :

(à venir)

Le « Ce Qu'il Faut Retenir » de la forme factorisée :

1) Son expression :

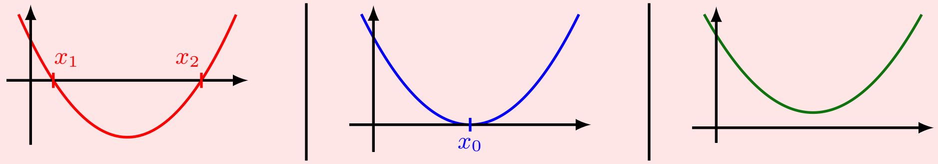
Suivant le nombre de racines de P, nous obtenons :

Si deux racines x_1 et x_2,	Si une racine x_0,	Si aucune racine,
$P(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$	$P(x) = a\,(x - x_0)^2$	Pas de forme factorisée

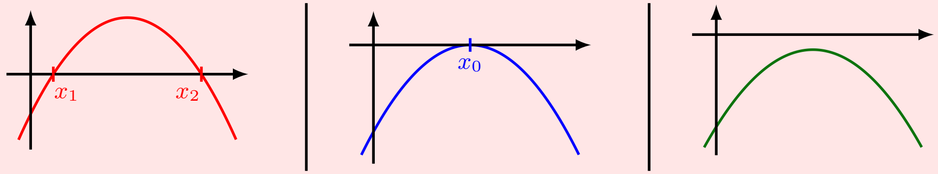
Le « a » est le même que dans la forme développée : $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

2) Sa représentation graphique :

Si a est positif, nous avons des smileys « contents » :



Si a est négatif, nous avons des smileys « pas contents » :



3) Son tableau de signes :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
P	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
P	Signe de a	0	Signe de a

x	$-\infty$	$+\infty$
P	Signe de a	

Mémo : Le signe de $-a$ est à mettre entre les deux racines x_1 et x_2.

Savoir - faire : Obtenir le signe d'une forme factorisée.

1) Trinômes avec deux racines :

Construire le tableau de signes des trinômes suivants :

$P(x) = 2\,(x-3)\,(x-5)$ | $Q(x) = -\,(x-4)\,(x+7)$

Correction :

$a = 2$ ⇒ **négatif entre les racines.**

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a = -1$ ⇒ **positif entre les racines.**

x	$-\infty$		-7		4		$+\infty$
Q		$-$	0	$+$	0	$-$	

Bien mettre les racines dans l'ordre croissant : Ne pas mettre 4 puis -7.

2) Trinômes avec une ou aucune racine :

Construire le tableau de signes des trinômes suivants :

$P(x) = -3\,(x+1)^2$ | $Q(x) = 4\,(x-2)^2 + 1$

Rappelons par la même occasion qu'un carré est toujours positif.

Correction :

$a = -3$ ⇒ **toujours négatif.**

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
P		$-$	0	$-$	

Aucune racine car strictement positif.

x	$-\infty$		$+\infty$
Q		$+$	

3) Erreur classique sur la valeur de a :

Construire le tableau de signes de : $P(x) = 5\,(x-2)\,(6-2x)$

Réponse classique :

$a = 5$ donc **négatif entre les racines :**

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

Correction :

Or si nous développons $P(x)$, nous obtenons en x^2 :

$5 \times x \times (-2x) = -10x^2$ donc $a = -10$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
P		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le « Ce Qu'il Faut Retenir » de la factorisation :

Par quoi factoriser un polynôme P si le réel x_1 en est une racine ?

Par le polynôme $(x - x_1)$: celui qui s'annule en $x = x_1$.

Si P est de degré 1, il existe a réel tel que : $P(x) = a\,(x - x_1)$

Si P est de degré 2, il existe m et p réels tq : $P(x) = (x - x_1)(m\,x + p)$

Si P est de degré 3, il existe a, b et c réels tq : $P(x) = (x - x_1)(ax^2 + bx + c)$

Quand on multiplie des polynômes, on remarque bien que le degré augmente.

Savoir - faire : Factoriser à l'aide d'une racine évidente.

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 10x + 8$$

1) Déterminons, par le calcul, une racine évidente de f.

L'adjectif « évidente » veut dire que la réponse sera : 1, 2, -1, -2 ou 0.

Or, après quelques essais, nous avons trouvé que : $f(-1) = 0$

Donc -1 est une racine évidente de f.

2) Factorisons à l'aide du « CQFR » :

Il existe donc deux réels m et p tels que :

Pour tout réel x, $f(x) = (x+1)\,(m\,x + p)$

3) Développons et identifions les coefficients :

Après développement, nous obtenons que pour tout réel x :

$$2x^2 + 10x + 8 = m\,x^2 + (m+p)\,x + p$$

Par identification, nous obtenons : $m = 2$ **et** $p = 8$

4) Quelle est alors la deuxième racine de f ?

$$\begin{aligned}
&(x+1)\,(2x+8) = 0\\
\iff\ & x + 1 = 0 \ \text{ ou } \ 2x + 8 = 0\\
\iff\ & x = -1 \ \text{ ou } \ 2x = -8\\
\iff\ & x = -1 \ \text{ ou } \ x = -4
\end{aligned}$$