Dérivation : Savoir calculer un nombre dérivé (2).

Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left]-2\,;+\infty\right[$ par :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x+2}}$$

1) Démontrer que f est dérivable en $x = 1$.

2) Calculer alors le nombre dérivé de f en 1.

Propriété à utiliser :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L tel que :

$$\boxed{\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L}$$

Le réel L ainsi obtenu, noté $f'(a)$, est appelé le nombre dérivé de f en a.

Correction :

Pour tout réel $h \neq 0$ tel que $1 + h \in I$,

- **Après plusieurs lignes de calculs :** $f(1+h) - f(1) = -\dfrac{h}{3(3+h)}$
- **Ainsi** $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{1}{\cancel{h}} \times \left(- \dfrac{\cancel{h}}{3(3+h)} \right) = -\dfrac{1}{3(3+h)}$
- **Donc, par passage à la limite, quand $h \to 0$, nous obtenons :**

$$\boxed{f'(1) = -\frac{1}{9}}$$

Comme $-\dfrac{1}{9}$ est un réel, nous venons également de démontrer que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 1}$$