Suites géométriques – Déterminer U_n en fonction de n.

Le terme U_n représente la population d'une ville pour l'année $2019 + n$.
En 2020, la population était de $17\ 400$ habitants et elle augmente de 5 % par an.
Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n.

1 On analyse l'énoncé.

1. a) Nature de la suite ?

Pour une évolution de $\pm\ t$ %, on multiplie par : $1 \pm \dfrac{t}{100}$

« augmente de 5 % par an » **donc** **on multiplie par** $1 + \dfrac{5}{100} = \boxed{1,05}$

Notre suite sera donc de nature géométrique avec une raison $q = 1,05$.

1. b) Terme initial ?

Le terme U_n de rang n représente l'année $2019 + n$.
Donc l'année 2020 sera représentée par le terme U_1 de rang 1 avec $U_1 = 17\ 400$.

2 On multiplie par la raison q plusieurs fois.

Pour aller de U_1 à U_n, il y a $\left(n - 1\right)$ transitions = « la fin » - « le début »
Nous allons donc multiplier par $q = 1,05$, $\left(n - 1\right)$ fois :

$$\textbf{Pour tout } n \in \mathbb{N},\quad U_n = U_1 \overbrace{\times}^{\text{géométrique}} \underbrace{1,05}_{\text{raison } q}{}^{\overbrace{(n-1)}^{\text{nombre de transitions}}}$$

Nous venons simplement d'utiliser la formule généralisée suivante :

$$\textbf{Pour tout } n \in \mathbb{N} \textbf{ et } p \in \mathbb{N},\quad \boxed{U_n = U_p \times q^{\,n-p}}$$

en substituant p par 1 et q par $1,05$.

3 On conclue.

$$\textbf{Pour tout } n \in \mathbb{N},\quad \boxed{U_n = 17\,400 \times 1,05^{\,n-1}}$$