Calcul du nombre dérivé avec une fonction du 3^e degré :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{f(x) = -2x^2 + 4x + 3x^3 - 5}$

1) Pour tout réel h, compléter le calcul suivant :

$f(-1+h) - f(-1) = \ldots\ldots \times h^3 + \ldots\ldots \times h^2 + \ldots\ldots \times h$

2) En déduire, s'il existe, la valeur du nombre dérivé : $f'(-1) = \ldots\ldots$

Pour tout réel a et h, on a le développement suivant :

$$(a+h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$$

1 Théorème que nous allons utiliser :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \in I$.

On dira que f est dérivable en a si :

Le taux de variation $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0.

Cette limite finie est alors appelé le nombre dérivée de f en a et elle se note $f'(a)$.

2 Utilisons l'identité remarquable proposée.

Pour tout réel h, *(dans notre exemple $a = -1$)*

- $(-1+h)^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2h + 3(-1)h^2 + h^3$
  $= -1 + 3h - 3h^2 + h^3$
  $(-1+h)^3 = \boxed{h^3 - 3h^2 + 3h - 1}$

3 Complétons le calcul.

Pour tout réel h, *(dans notre exemple $a = -1$)*

1) $f(-1+h) = -2\times(-1+h)^2 + 4\times(-1+h) + 3\times(-1+h)^3 - 5$
$= -2\left(1 - 2h + h^2\right) - 4 + 4h + 3\left(h^3 - 3h^2 + 3h - 1\right) - 5$
$= 3\times h^3 + \left(-2-9\right)\times h^2 + \left(4+4+9\right)\times h + \left(-2-4-3-5\right)$
$f(-1+h) = \boxed{3h^3 - 11h^2 + 17h - 14}$

2) $f(-1) = -2\times(-1)^2 + 4\times(-1) + 3\times(-1)^3 - 5$
$= -2\times 1 - 4 + 3\times(-1) - 5$
$f(-1) = \boxed{-14}$

3) $= f(-1+h) - f(-1)$
$= \left(3h^3 - 11h^2 + 17h - 14\right) - \left(-14\right)$
$= \boxed{3h^3 - 11h^2 + 17h}$

4 Déduisons - en la valeur du nombre dérivé.

Pour tout réel $h \neq 0$,

- $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{3h^3 - 11h^2 + 17h}{h} = \boxed{3h^2 - 11h + 17}$
- **Or** $\lim\limits_{h\to 0}\left(3h^2 - 11h + 17\right) = \boxed{17}$ **qui est une limite finie.**
- **Donc f est dérivable en -1 et** $\boxed{f'(-1) = 17}$